Eine Methode Integralformeln zu finden, die in gewissen Fällen in einem gegebenen Verhältnis zueinander stehen, wo zugleich eine Methode angegeben wird, Kettenbrüche zu summieren *

Leonhard Euler

§1 Wie bei rekurrenten Reihen jeder beliebige Term aus einem einzigen oder mehreren vorausgehenden nach einem gewissen konstanten Bildungsgesetz bestimmt wird, so bin ich im Begriff, hier Reihen solcher Art zu betrachten, in welchen jeder beliebige Term aus einem oder mehreren vorausgehenden nach einem gewissen variablen Bildungsgesetz bestimmt wird. Weil ja aber bei solchen Reihen die die allgemeinen Terme ausdrückende Formel meistens nicht algebraisch sondern transzendent ist, wird es passend sein, dass die einzelnen Terme durch Integralformeln dargeboten werden; damit diese bestimmte Werte liefern, nehme ich an, dass nach der Integration der variablen Größe ein bestimmter Wert zugeteilt wird; und nun geht die wesentliche Frage darauf zurück, wie diese Integralformeln beschaffen sein müssen, dass jeder beliebige Term nach einem gewissen Gesetz aus einem oder mehreren

*Originaltitel: "Methodus inveniendi formulas integrales, quae certis casibus datam inter se teneant rationem, ubi sumul methodus traditur fractiones continuas summandi", erstmals publiziert in „*Opuscula Analytica* 2 1785, pp. 178-216", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 18, pp. 209 - 243 ", Eneström-Nummer E594, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz"

vorausgehenden bestimmt wird.

§2 Damit dies deutlicher erkannt wird, wollen wir die allbekannt Reihe dieser Integralformeln betrachten

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-xx}}, \quad \int \frac{xxdx}{\sqrt{1-xx}}, \quad \int \frac{x^4dx}{\sqrt{1-xx}}, \quad \int \frac{x^6dx}{\sqrt{1-xx}} \quad \text{etc.}$$

wenn diese so integriert werden, dass sie nach Setzen von $x = 0$ verschwinden, dann aber der Variable x der Wert $= 1$ zugeteilt wird, hängt jeder beliebige Term so vom vorausgehenden ab, dass gilt

$$\begin{aligned}
\int \frac{xxdx}{\sqrt{1-xx}} &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-xx}} \\
\int \frac{x^4dx}{\sqrt{1-xx}} &= \frac{3}{4}\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-xx}} \\
\int \frac{x^6dx}{\sqrt{1-xx}} &= \frac{5}{6}\int \frac{x^4dx}{\sqrt{1-xx}}
\end{aligned}$$

und im Allgemeinen

$$\int \frac{x^ndx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{n}{n-1}\int \frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$$

Daher tritt es klar zutage, dass diese allgemeine Formel als allgemeiner Term jener Reihe angesehen werden kann und jeder beliebige Term aus dem vorausgehenden entspringt, wenn dieser mit $\frac{n-1}{n}$ multipliziert wird.

§3 In Anlehnung an diesen Fall wollen wir also eine Reihe von Integralen im Allgemeinen so festlegen

$$\int dv, \quad \int xdv, \quad \int xxdv, \quad \int x^3 dv, \quad \int x^4 dv \quad \text{etc.},$$

so dass der dem Index n entsprechende Term dieser ist

$$\int x^{n-1} dv,$$

welche Integrale wir annehmen, so genommen zu werden, dass sie nach Setzen von $x = 0$ verschwinden; nach der Integration wollen wir aber der variablen Größe x einen bestimmten konstanten Wert zuteilen, wie beispielsweise $x = 1$ oder einer jeden anderen Zahl. Nachdem diese Dinge festgelegt worden sind, geht die Frage darauf zurück, was für eine Funktion von x für v angenommen werden muss, dass jeder beliebige Term durch einen oder zwei oder gar mehrere vorausgehende nach einem gewissen gegebenen Gesetz, wie auch immer variabel oder vom Index n abhängend, bestimmt wird; dort wird freilich besonders darauf zu achten sein, zu wie vielen Dimensionen der Index n in der vorgelegten Relationsskala ansteigt; meistens wird es aber nicht von Nöten sein, weiter als bis zur ersten Dimension aufzusteigen. Daher wollen wir also die folgenden Probleme behandeln.

PROBLEM 1

§4 Eine Funktion v zu finden, dass diese Relation zwischen zwei aufeinander folgenden Termen Geltung hat

$$\int x^n dv = \frac{\alpha n + a}{\beta n + b} \int x^{n-1} dv.$$

LÖSUNG

Es wird also hier verlangt, dass gilt

$$(\alpha n + a) \int x^{n-1} dv = (\beta n + b) \int x^n dv,$$

wenn natürlich nach der Integration der Variable x ein bestimmter Wert zugeteilt wird. Weil ja also diese Bedingung erst dann Geltung haben muss, nachdem der Variable x dieser konstante Wert gegeben worden war, wollen wir im Allgemeinen festlegen, während x die Variable ist, dass diese Gleichung Geltung hat

$$(\alpha n + a) \int x^{n-1} dv = (\beta n + b) \int x^n dv + V,$$

die Größe V aber so beschaffen ist, dass sie verschwindet, nachdem der Variable jener bestimme Wert zugeschrieben worden war. Aber zusätzlich, weil wir die beiden Integrale annehmen so genommen zu werden, dass sie nach Setzen von $x = 0$ verschwinden, ist es notwendig, dass auch diese Größe V in diesem selben Fall verschwindet.

§5 Weil ja diese Gleichung für alle Indizes n bestehen muss, welche wir freilich immer als positiv ansehen, wird leicht eingesehen, dass diese Größe V den Faktor x^n haben muss; auf diese Weise wird auch schon dieser Bedingung Genüge geleistet, dass nach Setzen von $x = 0$ auch $V = 0$ wird. Deswegen wollen wir festlegen

$$V = x^n Q,$$

wo Q eine an das Vorhaben angepasste Funktion von x bezeichnet, und welche wir uns zugleich wünschen so beschaffen zu sein, dass sie verschwindet, wenn x ein gewisser Wert zugeteilt wird.

§6 Weil also sein muss

$$(\alpha n + a)\int x^{n-1}dv = (\beta n + b)\int x^n dv + x^n Q,$$

werde die Gleichung differenziert und nach Dividieren des Differentials durch x^{n-1} wird zu dieser Differentialgleichung gelangt werden

$$\alpha n + a)dv = (\beta n + b)xdv + nQdx + xdQ;$$

weil diese für alle Werte von n bestehen muss, müssen sich die mit diesem Buchstaben behafteten Terme gegenseitig aufheben, woher wir diese zwei Gleichungen erlangen

$$\text{I.}\quad (\alpha - \beta x)dv = Qdx \quad \text{und} \quad \text{II.}\quad (a - bx)dv = xdQ.$$

Aus der ersten wird $dv = \frac{Qdx}{\alpha - \beta x}$, aus der anderen hingegen $dv = \frac{xdQ}{a - bx}$, welche zwei Werte einander gleich gesetzt diese Gleichung an die Hand geben $\frac{dQ}{Q} = \frac{dx}{x} \cdot \frac{a-bx}{\alpha - \beta x}$, welche Gleichung in diese Teile aufgelöst wird

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{a}{\alpha} \cdot \frac{dx}{x} + \frac{a\beta - b\alpha}{\alpha} \cdot \frac{dx}{\alpha - \beta},$$

deren Integral also sein wird

$$\log Q = \frac{a}{\alpha}\log x - \frac{a\beta - b\alpha}{\alpha\beta}\log(\alpha - \beta x),$$

woher abgeleitet wird

$$Q = Cx^{\frac{a}{\alpha}}(\alpha - \beta x)^{\frac{b\alpha - a\beta}{\alpha\beta}}.$$

§7 Aus diesem für Q gefundenen Wert tritt es aber sofort klar zu tage, dass er im Fall $\frac{\alpha}{\beta}$ verschwindet, wenn nur $\frac{b\alpha - a\beta}{\alpha\beta} > 0$ war; wenn dies aber nicht passiert, ist es nicht klar, auf welche Weise diese Größe in jenem Fall verschwinden kann. Nachdem aber dieser Wert Q gefunden worden ist, wird daher aufgefunden werden

$$dv = Cx^{\frac{a}{\alpha}}dx(\alpha - \beta x)^{\frac{b\alpha - a\beta}{\alpha\beta} - 1}$$

und daher wird der dem Index n entsprechende Term unserer Reihe dieser sein

$$\int x^{n-1}dv = C\int x^{n+\frac{a}{\alpha}-1}dx(\alpha - \beta x)^{\frac{b\alpha - a\beta}{\alpha\beta} - 1},$$

dann wird aber sein

$$V = Cx^{n+\frac{a}{\alpha}}(\alpha - \beta x)^{\frac{b\alpha - a\beta}{\alpha\beta}}.$$

Dort geht die Sache besonders darauf zurück, dass die Größe außer im Fall $x = 0$ darüber hinaus in einem anderen Fall verschwindet.

KOROLLAR 1

§8 Hier tauchen zwei Fälle auf, die eine eigene Entwicklung erfordern; der erste ist der, in dem $\alpha = 0$ ist; dann wird aber von der Gleichung $\frac{dQ}{Q} = -\frac{(a-bx)dx}{\beta xx}$ aus zu beginnen zu beginnen sein, woher durch Integrieren $\log Q = \frac{a}{\beta x} + \frac{b}{\beta}\log x$ gefunden wird, und daher durch Nehmen von e für die Zahl, deren hyperbolischer Logarithmus $= 1$ ist, erschlossen wird

$$Q = e^{\frac{a}{\beta x}}x^{\frac{b}{\beta}},$$

welche Formel nicht ins Nichts übergehen kann, wenn nicht $\frac{a}{\beta x} = -\infty$ und daher $x = 0$ wird, und so hätte man nicht zwei Fälle, in denen $V = 0$ werden würde, obwohl dennoch zwei verlangt wurden. Aber indes wird daher werden

$$dv = \frac{e^{\frac{a}{\beta x}} x^{\frac{b}{\beta}} dx}{-\beta x}.$$

KOROLLAR 2

§9 Der andere eine eigene Entwicklung erfordernde Fall wird $\beta = 0$ sein; dann wird aber $\frac{dQ}{Q} = \frac{dx(a-bx)}{\alpha x}$ sein, woher $\log Q = \frac{a}{\alpha}\log x - \frac{bx}{\alpha}$ und daher $Q = x^{\frac{a}{\alpha}} e^{\frac{-bx}{\alpha}}$ wird, welche Form im Fall $x = \infty$ verschwindet, wenn nur $\frac{b}{\alpha}$ eine positive Zahl war; wenn aber $\frac{b}{\alpha}$ eine negative Zahl war, dann verschwindet Q im Fall $x = -\infty$. Weiter wird aber in diesem Fall werden

$$dv = \frac{x^{\frac{a}{\alpha}} e^{\frac{-bx}{\alpha}} dx}{\alpha}.$$

BEMERKUNG

§9[a] Nachdem diese Dinge im Allgemeinen bemerkt worden sind, wollen wir einige Spezialfälle entwickeln, in denen wir den Buchstaben α, β und a, b gewisse Werte zuteilen werden, welche schon hinreichend bekannte Fälle hervorbringen.

BEISPIEL 1

§9[b] Es werden Integralformeln gesucht, dass wird

$$\int x^n dv = \frac{2n-1}{2n} \int x^{n-1} dv.$$

Weil also in diesem Fall $(2n-1)\int x^{n-1}dv = 2n\int x^n dv$ sein muss, wird in diesem Fall $\alpha = 2$ und $a = -1$, dann aber $\beta = 2$ und $b = 0$ sein; daher wird

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dx}{2x(1-x)} = -\frac{dx}{2x} - \frac{dx}{2(1-x)},$$

daher durch Integrieren

$$\log Q = -\frac{1}{2}\log x + \frac{1}{2}\log(1-x)$$

und daher

$$Q = C\sqrt{\frac{1-x}{x}}, \quad \text{also} \quad V = Cx^n\sqrt{\frac{1-x}{x}}.$$

Weiter, weil hier $dv = \frac{Qdx}{2(1-x)}$ ist, wird sein

$$dv = \frac{Cdx\sqrt{\frac{1-x}{x}}}{2(1-x)} = \frac{Cdx}{2\sqrt{x-xx}};$$

nachdem also $C = 0$ genommen worden ist, wird $dv = \frac{dx}{\sqrt{x-xx}}$ und unsere allgemeine Formel diese sein

$$\int x^{n-1}dv = \int \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{x-xx}};$$

daher, weil $V = x^n\sqrt{\frac{1-x}{x}}$ ist, verschwindet diese Größe offenbar nach Nehmen von $x = 1$, so dass unsere Formel, wenn nach der Integration $x = 1$ gesetzt wird, dem Gesuchten Genüge leistet. Wenn wir daher nun $x = yy$ setzen, wird diese Formel diese Form annehmen

$$2\int\frac{y^{2n-2}dy}{\sqrt{1-yy}},$$

welche, nachdem nach der Integration $y=1$ gesetzt worden ist, diese Relation liefert

$$\int\frac{y^{2n}dy}{\sqrt{1-yy}}=\frac{2n-1}{2n}\int\frac{y^{2n-2}dy}{\sqrt{1-yy}},$$

welche die oben (§2) erwähnten Relationen enthält; daher wird nämlich werden

$$\int\frac{yydy}{\sqrt{1-yy}}=\frac{1}{2}\int\frac{dy}{\sqrt{1-yy}},$$

$$\int\frac{y^4dy}{\sqrt{1-yy}}=\frac{3}{4}\int\frac{yydy}{\sqrt{1-yy}}$$

und

$$\int\frac{y^6dy}{\sqrt{1-yy}}=\frac{5}{6}\int\frac{y^4dy}{\sqrt{1-yy}}.$$

Beispiel 2

Es werden Integralformeln gesucht, dass wird

$$\int x^n dv=\frac{\alpha n-1}{\alpha n}\int x^{n-1}dv.$$

Weil also hier $(\alpha n - 1)\int x^{n-1}dv = \alpha n \int x^n dv$ sein muss, wird in diesem Fall $a = -1$, $\beta = \alpha$ und $b = 0$ sein, woher durch die oben gegebenen Formeln erschlossen wird

$$Q = Cx^{\frac{-1}{\alpha}}(\alpha - \alpha x)^{\frac{-a}{\alpha}} = Cx^{-\frac{-1}{\alpha}}(1-x)^{\frac{+1}{\alpha}},$$

welche Größe natürlich nach Setzen von $x = 1$ verschwindet. Dann wird aber sein

$$dv = \frac{x^{\frac{-1}{\alpha}}(1-x)^{\frac{+1}{\alpha}}dx}{1-x},$$

woher unsere allgemeine Formel sein wird

$$\int x^{n-1}dv = \int x^{n-\frac{1}{\alpha}-1}(1-x)^{+\frac{1}{\alpha}-1}dx = \int \frac{x^{n-\frac{1}{\alpha}-1}}{(1-x)^{1-\frac{1}{\alpha}}},$$

welche gefälliger gemacht wird, indem $x = y^\alpha$ gesetzt wird; dann wird sie nämlich diese Form annehmen

$$\int \frac{y^{\alpha n-2}dy}{(1-y^\alpha)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}},$$

wo wiederum nach der Integration $y = 1$ gesetzt werden muss. Es wird daher sein

$$\int \frac{y^{\alpha n+\alpha-2}dy}{(1-y^\alpha)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} = \frac{\alpha n - 1}{\alpha n}\int \frac{y^{\alpha n-2}dy}{(1-y^\alpha)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}$$

und daher werden die folgenden Spezialfälle entspringen

$$\int \frac{y^{2\alpha-2}dy}{(1-y^\alpha)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} = \frac{\alpha-1}{\alpha}\int \frac{y^{\alpha-2}dy}{(1-y^\alpha)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}$$

und

$$\int \frac{y^{3\alpha-2}dy}{(1-y^\alpha)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} = \frac{2\alpha-1}{2\alpha}\int \frac{y^{2\alpha-2}dy}{(1-y^\alpha)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}.$$

§11 Daher, wenn $\alpha = 1$ genommen wird, dass werden muss

$$\int x^n dv = \frac{n-1}{n}\int x^{n-1}dv,$$

wird also unsere allgemeine Formel schon in y ausgedrückt $\int y^{n-2}dy$ sein, deren Wert also $\frac{1}{n-1}y^{n-1} = \frac{1}{n-1}$ ist, woher die ganze Reihe der Integralformeln in diese übergehen wird

$$\frac{1}{0}, \quad \frac{1}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{7} \quad \text{etc.}$$

§12 Wir wollen auch $\alpha = \frac{1}{2}$ nehmen und nun wird es nicht weiter nötig sein zu y fortzuschreiten. In diesem Fall wird also sein

$$Q = \frac{(1-x)^2}{xx} \quad \text{und} \quad dv = \frac{(1-x)dx}{xx},$$

woher unsere allgemeine Formel wird

$$\int x^{n-1}dv = \int x^{n-3}(1-x)dx,$$

deren Wert also algebraisch ausgedrückt dieser sein wird

$$\frac{1}{n-2}x^{n-2} - \frac{1}{n-1}x^{n-1} = \frac{1}{(n-1)(n-2)},$$

woher die Reihe unserer Formeln diese werden wird

$$\frac{1}{1\cdot -0}, \quad \frac{1}{0\cdot 1}, \quad \frac{1}{1\cdot 2}, \quad \frac{1}{2\cdot 3}, \quad \frac{1}{3\cdot 4}, \quad \frac{1}{4\cdot 5} \quad \text{etc.}$$

BEISPIEL 3

§13 Es werden Integralformeln gesucht, dass gilt

$$\int x^n dv = n \int x^{n-1} dv.$$

Weil also hier $n\int x^{n-1}dv = 1\int x^n dv$ sein muss, wird $\alpha = 1$, $a = 0$, $b = 1$, $\beta = 0$ sein. Weil also $\beta = 0$ ist, hat der Fall von Korollar 2 hier Geltung und es wird daher $Q = e^{-x}$ und deshalb $V = e^{-x}x^n$ sein, welche Größe in diesen zwei Fällen $x = 0$ und $x = \infty$ verschwindet. Weiter wird aber $dv = e^{-x}dx$ sein und daher wird unsere allgemeine Formel $\int x^{n-1}dxe^{-x}$ werden, woher sich die Terme der Reihe selbst vom Anfang aus auf die folgende Weise verhalten werden

$$\int e^{-x}dx, \quad \int e^{-x}xdx, \quad \int e^{-x}xxdx, \quad \int e^{-x}x^3dx \quad \text{etc.},$$

nachdem welche so integriert worden sind, dass sie nach Setzen von $x = 0$ verschwinden, wird dann in der Tat nach Setzen von $x = \infty$ die folgende hinreichend einfache Reihe entspringen

$$1, \quad 1, \quad 1 \cdot 2, \quad 1 \cdot 2 \cdot 3, \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4, \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \quad \text{etc.},$$

welche die WALLIS'sche hypergeometrische Reihe ist, deren allgemeiner Term also dieser ist

$$\int x^{n-1} e^{-x} dx = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1).$$

§14 Mit Hilfe dieses allgemeinen Termes wird es also möglich sein, diese Reihe zu interpolieren. So, wenn der Mittelterm zwischen den zwei ersten gesucht wird, muss $n = \frac{3}{2}$ gesetzt werden und der Wert dieses Termes wird $\int e^{-x} dx \sqrt{x}$ sein, dessen Wert aber auf keine Weise algebraisch ausgedrückt werden kann. Ich habe aber auf eine einzigartige Weise gefunden, dass dieser Term selbst $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ gleich wird, während π die Peripherie des Kreises bezeichnet, dessen Durchmesser $= 1$ ist, woher wir hier umgekehrt erkennen, dass $\int e^{-x} dx \sqrt{x} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ist, nachdem natürlich nach der Integration $x = \infty$ gesetzt worden ist. Aber der diesem vorausgehende dem Index $\frac{1}{2}$ entsprechende Term wird $\sqrt{\pi}$ sein, welchem also die Formel $\int \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{x}}$ gleich wird. Wenn wir daher hier $e^{x} = y$ setzen, so dass nach Setzen von $x = 0$ als Folge $y = 1$ ist, aber nach Setzen von $x = \infty$ auch $y = \infty$ wird, dann geht also diese Formel $\int \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{x}}$ in diese $\int \frac{dy}{yy\sqrt{\log y}}$ über, welche Formel, wenn sie so integriert wird, dass sie nach Setzen von $y = 1$ verschwindet, dann aber $y = \infty$ wird, den Wert von $\sqrt{\pi}$ liefert. Wenn weiter $y = \frac{1}{z}$ wird, werden die Integrationsgrenzen $z = 1$ und $z = 0$ sein und diese Integralformel wird sein

$$-\int \frac{dz}{\sqrt{-\log z}} \begin{bmatrix} \text{von} & z & = & 1 \\ \text{bis} & z & = & 0 \end{bmatrix} = \sqrt{\pi}$$

oder nach Vertauschen der Integrationsgrenzen

$$\int \frac{dz}{\sqrt{-\log z}} \begin{bmatrix} \text{von} & z & = & 0 \\ \text{bis} & z & = & 1 \end{bmatrix} = \sqrt{\pi},$$

wie ich schon einst bemerkt habe.

Beispiel 4

§15 Es werden Integralformeln gesucht, dass gilt

$$\int x^n dv = \frac{1}{n}\int x^{n-1}dv \quad \text{oder} \quad \int x^{n-1}dv = n\int x^n dv,$$

Hier ist $\alpha = 0$ und $a = 1$, $\beta = 1$ und $b = 0$; dies ist also der in Korollar 1 behandelte Fall, woher erschlossen wird, dass $Q = e^{\frac{1}{x}}$ und daher $v = x^n e^{\frac{1}{x}}$ sein wird, welche Formel nicht einmal nach Setzen von $x = 0$ verschwindet, weil ja die Formel $e^{\frac{1}{0}}$ dem Unendlichen einer infinitesimalen Potenz gleichwertig ist. Hier passiert es aber auf wundersame Weise, dass der Fall $x = -0$ die Formel $e^{\frac{-1}{0}}$ verschwinden lässt. Natürlich, wenn ω eine unendlich kleine Größe bezeichnet, wird $e^{\frac{1}{\omega}} = \infty^\infty$ sein, dann wird aber unerwartet $e^{\frac{-1}{\omega}} = \frac{1}{\infty^\infty} = 0$, welches Grundes wegen es hier nicht möglich ist, daher eine unserem Ziel entsprechende Formel darzubieten. Es wird freilich $dv = -e^{\frac{1}{x}}\frac{dx}{x}$ aufgefunden werden, sodass unsere allgemeine Formel $-\int x^{n-2}dxe^{\frac{1}{x}}$ sein wird, welche uns aber keinen Nutzen verschaffen kann.

§16 Wenn wir daher hier $\frac{1}{x} = y$ setzen, geht diese allgemeine Formel in diese $+\int \frac{e^y dy}{y^n}$ über. Aber in der Tat wird nun $V = \frac{e^y}{y^n}$ sein, welche Formel nach Setzen von $y = -\infty$ verschwindet. Auf welche Weise auch immer wir aber diesen Ausdruck transformieren, es wird immer derselbe Umstand auftauchen. Dennoch wird es indes auch möglich sein, diesen Fall auf die folgende Weise aufzulösen. Es sei nämlich der erste Term der Reihe, den wir suchen, $= \omega$, von welchem aus durch die vorgeschriebene Regel die folgenden der Reihe nach so fortschreiten werden

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & n \\ \omega, & \frac{\omega}{1}, & \frac{\omega}{1\cdot 2}, & \frac{\omega}{1\cdot 2\cdot 3}, & \frac{\omega}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}, & \cdots & \frac{\omega}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}. \end{array}$$

Oben haben wir aber gesehen, dass der Wert dieser Formel $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (n-1)$ durch dieses Integral $\int x^{n-1} dx e^{-x}$ ausgedrückt wird, nachdem die Integration von $x = 0$ bis zu $x = \infty$ erstreckt worden ist; es ist also nur nötig, dass wir diese Integralformel in den Nenner übertragen, und der allgemeine Term der Reihe, die wir suchen, wird dieser sein

$$\frac{1}{\int x^{n-1} e^{-x} dx},$$

woher hinreichend klar eingesehen wird, dass die Aufgabe nicht durch eine einfache Integralformel erledigt werden kann, welches selbe freilich auch über die anderen Fälle festzuhalten ist, in den die Größe V nicht in zwei Fällen verschwinden kann; dann ist es nämlich nur nötig, den Bruch $\frac{\alpha n + a}{\beta n + b}$ zu invertieren und die Integralformel in den Nenner zu übertragen.

Bemerkung

§17 Wenn weder $\alpha = 0$ noch $\beta = 0$ ist, welche Fälle wir schon erledigt haben, kann die Auflösung unseres Problems immer auf den Fall zurückgeführt werden, in dem die beiden Buchstaben α und β der Einheit gleich sind. Weil nämlich gelten muss

$$\int x^n dv = \frac{\alpha n + a}{\beta n + b} \int x^{n-1} dv,$$

werde $x = \frac{\alpha y}{\beta}$ gesetzt und es wird werden

$$\frac{\alpha}{\beta} \int y^n dv = \frac{\alpha n + a}{\beta n + b} \int y^{n-1} dv,$$

welche Gleichung auf diese Form reduziert wird

$$\int y^n dv = \frac{n + a : \alpha}{n + b : \beta} \int y^{n-1} dv.$$

Wenn wir daher nun anstelle von $\frac{a}{\alpha}$ hier a und b anstelle von $\frac{b}{\beta}$ schreiben, wird diese Formel aufzulösen sein

$$\int y^n dv = \frac{n+a}{n+b} \int y^{n-1} dv,$$

deren Auflösung, wenn wir anstelle von x entsprechend y und anstelle der Buchstaben α und β die Einheit schreiben, aus der oberen Lösung zuerst liefert

$$Q = Cy^a(1-y)^{b-a},$$

was also nach Setzen von $y = 1$ verschwindet, wenn nur $b > a$ war; dann wird aber die Formel selbst diese sein

$$\int y^{n-1} dv = C \int y^{n+a-1} dy (1-y)^{b-a-1};$$

wenn aber $b < a$ war, kann diese Lösung, wie wir gesehen haben, keine Geltung haben; sondern es muss in diesem Fall für den Term unserer Reihe diese Form $\frac{1}{\int y^{n-1} dv}$ angenommen werden, sodass dann gelten muss

$$\frac{1}{\int y^n dv} = \frac{n+a}{n+b} \cdot \frac{1}{\int y^{n-1} dv}$$

oder

$$\int y^n dv = \frac{n+a}{n+b} \int y^{n-1} dv,$$

deren Auflösung nach Vertauschen der Buchstaben a und b liefert

$$Q = Cy^b(1-y)^{a-b},$$

welche nun im Fall $y = 1$ verschwindet, wenn $a > b$ war; und dann wird die allgemeine Formel diese sein

$$\int y^{n-1}dv = C\int y^{n+b-1}dy(1-y)^{a-b-1}.$$

Ob also $b > a$ oder $a > b$ ist, die Lösung bereitet keine weitere Schwierigkeiten.

§18 Wenn aber entweder $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$ war, wird anstelle des einen auch die Einheit geschrieben werden können; daher, wenn sein muss

$$\int x^n dv = \frac{n+a}{b}\int x^{n-1}dv,$$

wird wegen $\alpha = 1$ und $\beta = 0$ unsere allgemeine Lösung

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{dx}{x}(a-bx),$$

woher $Q = Cxe^{-bx}$ erschlossen wird, welche Formel nach Setzen von $x = \infty$ verschwindet, wenn nur b eine positive Zahl war; dann wird aber der allgemeine Term

$$\int x^{n-1}dv = C\int x^{n+a-1}dxe^{-bx}.$$

Aber in der Tat kann die Zahl b nicht negativ sein, weil andernfalls die vorgeschriebene Bedingung unpassend wäre.

§19 Wir wollen auch den anderen Fall betrachten, in welchem $\alpha = 0$ und $\beta = 1$ ist und daher die vorgeschriebene Bedingung diese wird

$$\int x^n dv = \frac{a}{n+b} \int x^{n-1} dv,$$

woher dann auch folgt

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dx}{xx}(a - bx).$$

Daher wird aber für Q ein Wert entspringen, der außer im Fall $x = 0$ nicht verschwinden könnte; dieses Grundes wegen muss die allgemeine Formel $\frac{1}{\int x^{n-1} dv}$ gesetzt werden, so dass gelten muss

$$\int x^n = \frac{n+b}{a} \int x^{n-1} dv,$$

woher hervorgeht

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{dx}{x}(b - ax) \quad \text{und daher} \quad Q = Ce^{-ax} x^b;$$

welcher Ausdruck nach Setzen von $x = \infty$ verschwindet; weil ja a notwendigerweise eine positive Zahl sein muss; dann wird aber sein

$$dv = Ce^{-ax} x^b dx,$$

woher der allgemeine Term der Reihe sein wird

$$\frac{1}{C \int x^{n+b-1} dx e^{-ax}}.$$

PROBLEM 2

§20 Es bezeichne T den dem Index n entsprechenden Term in der Reihe, welchen wir zu betrachten in Angriff genommen haben, aber T' den folgenden Term und es werde diese zu erfüllende Bedingung vorgelegt

$$T' = \frac{(\alpha n + a)(\alpha' n + a')}{(\beta n + b)(\beta' n + b')} T.$$

LÖSUNG

Weil ja hier zwei Wertepaare auftauchen, wird dieser Bedingung am angenehmsten Genüge geleistet werden, wenn der allgemeine Term T als Produkt aus zwei Faktoren angesehen wird. Es werde also $T = RS$ gesetzt und es sei der folgende Term $R'S'$ und werden Formeln R und S gesucht, dass gilt

$$R' = \frac{\alpha n + a}{\beta n + b} R \quad \text{und} \quad S' = \frac{\alpha' n + a'}{\beta' n + b'} S;$$

dann wird aber durch Nehmen von $T = RS$ der vorgeschriebenen Bedingung offenbar Genüge geleistet werden. Auf diese Weise werden also für R und S entweder Formeln von dieser Art $\int x^{n-1} dv$ oder $\frac{1}{\int x^{n-1} dv}$ aufgefunden werden, was für die allgemeine Lösung ausreicht, woher wir die Sache an einem Beispiel illustrieren wollen.

BEISPIEL

§21 Es werde die allgemeine Formel T gesucht, dass wird

$$T' = \frac{nn - cc}{nn} T.$$

Wir wollen also T in die zwei Faktoren R und S auflösen und festlegen

$$R' = \frac{n-c}{n}R \quad \text{und} \quad S' = \frac{n+c}{n}S.$$

Für die erste Form, wenn wir $R = \int x^{n-1}dv$ setzen, wird aus der allgemeinen Lösung, wo $\alpha = 1$, $a = -c$, $\beta = 0$ und $b = 0$ sein wird, werden

$$Q = Cx^{-c}(1-x)^c,$$

welche Form offenbar nach Setzen von $x = 1$ verschwindet; und daher, weil wird

$$V = Cx^{n-c}(1-x)^c,$$

verschwindet diese Form auch im Fall $x = 0$, wenn nur $n > c$ war, was sicher angenommen werden kann, weil wir den Exponenten n unaufhörlich ins Unendliche zu wachsen annehmen und meistens für c nur Brüche angenommen zu werden pflegen. Daher wird also sein

$$R = C\int x^{n-c-1}(1-x)^{c-1}dx.$$

§22 Daher könnte nun der andere Wert des Buchstabens S abgeleitet werden, indem lediglich $-c$ anstelle von c geschrieben wird, dann würde aber nicht weiter $Q = 0$ werden, nachdem $x = 1$ gesetzt worden ist, weswegen für S die inverse Formel $\frac{1}{\int x^{n-1}dv}$ angenommen werden muss, dass gelten muss

$$\int x^n dv = \frac{n}{n+c}\int x^{n-1}dv;$$

weil dort $\alpha = 1$, $a =$, $\beta = 1$ und $b = c$ ist, wird aufgefunden

$$Q = C(1-x)^c,$$

welche Formel offenbar $= 0$ wird, nachdem $x = 1$ gesetzt worden ist; daher geht aber hervor

$$dv = C(1-x)^{c-1}dx,$$

also werden wir haben

$$S = \frac{1}{C\int x^{n-1}(1-x)^{c-1}dx};$$

als logische Konsequenz wird unsere gesuchte allgemeine Formel sein

$$T = \frac{\int x^{n-c-1}(1-x)^{c-1}dx}{\int x^{n-1}(1-x)^{c-1}dx}.$$

§23 Wenn wir daher also den ersten Term unserer durch Faktoren fortschreitenden Reihe $= A$ setzen, wird die Reihe selbst diese sein

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2, & 3 & 4 & \\ A, & \dfrac{1-cc}{1}A, & \dfrac{1-cc}{1}\cdot\dfrac{4-cc}{4}A, & \dfrac{1-cc}{1}\cdot\dfrac{4-cc}{4}\cdot\dfrac{9-cc}{9}A & \text{etc.}; \end{array}$$

woher, wenn wir $c = \frac{1}{2}$ nehmen, die Reihe diese sein wird

$$A, \quad \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}A, \quad \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}A, \quad \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot\frac{5\cdot 7}{6\cdot 6}A \quad \text{etc.},$$

von welcher also der dem Index n entsprechende Term dieser ist

$$\frac{\int x^{3-\frac{3}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx}{\int x^{n-1}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx},$$

welcher nach Setzen von $x = yy$ in diese Form übergeht

$$\frac{\int y^{2n-2}(1-yy)^{-\frac{1}{2}}dy}{\int y^{2n-1}(1-yy)^{-\frac{1}{2}}dy},$$

woher es klar zutage tritt, dass der erste Term dieser sein wird

$$A = \int \frac{dy}{\sqrt{1-yy}} : \int \frac{ydy}{\sqrt{1-yy}} = \frac{\pi}{2},$$

nachdem natürlich nach der Integration $x = 1$ gesetzt worden ist.

PROBLEM 3

§24 Es bezeichne T de dem Index n entsprechen Term und es seien T' und T'' die folgenden Terme für die Indizes $n+1$ und $n+2$; wenn zwischen drei aufeinander folgenden Termen eine solche Relation vorgelegt wird, dass gilt

$$(\alpha n + a)T = (\beta n + b)T' + (\gamma n + c)T'',$$

eine Formel für T ausfindig zu machen, mit welcher der allgemeine Term dieser Reihe ausgedrückt wird.

LÖSUNG

Es werde für T die Integralformel $\int x^{n-1} dv$ angenommen und das Integral von dieser werde so genommen, dass es nach Setzen von $x = 0$ verschwindet, und es werden die folgenden Terme $T' = \int x^n dv$ und $T'' = \int x^{n+1} dv$ sein, wenn freilich nach der Integration der Variable x ein bestimmter Wert zugeteilt wird. Solange aber dieser Größe x wie eine Variable angesehen wird, wollen wir festlegen, dass gilt

$$(\alpha n + a)T = (\beta n + b)T' + (\gamma n + c)T'' + x^n Q$$

und es ist klar, dass Q eine Funktion solcher Art von x sein muss, die verschwindet, wenn anstelle von x jener bestimmte Wert eingesetzt wird, welcher aber von der Null verschieden sein muss, weil wir ja schon angenommen haben, dass all diese Formeln in Null übergeht, nachdem $x = 0$ gesetzt worden ist. Wenn daher also nach Durchführen der Rechnung dieser Bedingung auf keine Weise Genüge geleistet können wird, wird das ein Anzeichen sein, dass unser Problem auf diese Weise nicht aufgelöst werden kann, natürlich dass der allgemeine Term T der Reihe durch eine solche einfache Differentialformel $\int x^{n-1} dv$ dargeboten wird.

§25 Wir wollen nun diese gerade aufgestellte Gleichung differenzieren und nach Division durch x^{n-1} wird die folgende Gleichung hervorgehen

$$(\alpha n + a)dv = (\beta n + b)xdv + (\gamma n + c)xxdv + nQdx + xdQ,$$

welche, weil sich die mit dem Buchstaben n behafteten Terme einzeln gegenseitig aufheben müssen, in diese zwei Gleichung zerspalten werden wird

$$\begin{aligned} &1. \quad \alpha dv = \beta xdv + \gamma xxdv + Qdx, \\ &2. \quad adv = bxdv + bxxdv + xdQ, \end{aligned}$$

aus deren erster wird

$$dv = \frac{Qdx}{\alpha - \beta x - \gamma xx},$$

aus der anderen wird hingegen

$$dv = xdQa - bx - cxx,$$

von welchen Werten der zweite durch den ersten dividiert liefert

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{dx(a - bx - cxx)}{x(\alpha - \beta x - \gamma xx)},$$

aus deren Integration also der Wert von Q gefunden werden muss, wonach es leicht klar werden wird, ob er in einem gewissen Fall außer $x = 0$ verschwinden kann. Besonders sollte aber hier bemerkt werden, wenn dieses Integral einen Faktor von dieser Art $e^{\frac{\lambda}{x}}$ involviert, dass dann die Lösung frei von jedem Erfolg sein wird, weil ja nach Setzen von $x = 0$ dieser Faktor eine so große Potenz des Unendlichen involviert, dass, auch wenn sie mit x^n multipliziert wird, das Produkt immer noch unendlich bleibt.

§26 Wenn es daher also möglich gewesen war, diesen vorgeschriebenen Bedingungen Genüge zu leisten, dann wird man nach Finden des Wertes des Buchstabens Q, welchen wir festlegen wollen, nachdem $x = f$ gesetzt worden ist, $= 0$ zu werden, haben

$$dv = \frac{Qdx}{\alpha - \beta x - \gamma xx}$$

und die die Natur der Reihe umfassende allgemeine Formel wird diese sein

$$T = \int x^{n-1} dv = \int \frac{x^{n-1} Q dx}{\alpha - \beta x - \gamma xx},$$

deren von der Grenze $x = 0$ bis hin zur Grenze $x = f$ erstrecktes Integral den Wert des irgendeinem Index n entsprechenden Termes T liefern wird.

Bemerkung

§27 Nachdem aber eine solche Relation zwischen drei aufeinander folgenden Termen einer gewissen Reihe gefunden worden ist, wird daher auf gewohnte Weise ein Kettenbruch gebildet werden können, dessen Wert anzugeben möglich sein wird. Wenn naämlich die Charaktere

$$T', \quad T'', \quad T''', \quad T'''' \quad \text{etc.}$$

der Reihe nach die nach T die folgenden Terme bis ins Unendliche bezeichnen, werden aus den Relationen, in welcher sie zueinander stehen, die folgenden Formeln abgeleitet werden. Aus der Relation

$$(\alpha n + a)T = (\beta n + b)T' + (\gamma n + c)T''$$

wird abgeleitet

$$(\alpha n + a)\frac{T}{T'} = \beta n + b + \frac{(\gamma n + c)(\alpha n + \alpha + a)}{(\alpha n + \alpha + a)T' : T''}.$$

Aus der folgenden Relation

$$(\alpha n + \alpha + a)T' = (\beta n + \beta + b)T'' + (\gamma n + \gamma + c)T'''$$

wird abgeleitet

$$(\alpha n+\alpha+a)\frac{T'}{T''}=\beta n+\beta+b+\frac{(\gamma n+\gamma+c)(\alpha n+2\alpha+a)}{(\alpha n+2\alpha+a)T'':T'''}.$$

Auf die gleiche Weise werden die folgenden Relationen diese Gleichungen an die Hand geben

$$\begin{aligned}(\alpha n+2\alpha+a)\frac{T''}{T'''} &= \beta n+2\beta+b+\frac{(\gamma n+2\gamma+c)(\alpha n+3\alpha+a)}{(\alpha n+3\alpha+a)T''':T''''},\\ (\alpha n+3\alpha+a)\frac{T'''}{T''''} &= \beta n+3\beta+b+\frac{(\gamma n+3\gamma+c)(\alpha n+4\alpha+a)}{(\alpha n+4\alpha+a)T'''':T'''''};\end{aligned}$$

daher ist es offenbar, wenn in der ersten Formel ununterbrochen der Reihe nach die folgenden Werte eingesetzt werden, dass ein Kettenbruch hervorgehen wird, dessen Wert der Formel $(\alpha n+a)\frac{T}{T'}$ gleich sein wird.

PROBLEM 4

Nach Vorlegen eines Kettenbruches dieser Form

$$\beta+b+\cfrac{(\gamma+c)(2\alpha+a)}{2\beta+b+\cfrac{(2\gamma+c)(3\alpha+a)}{3\beta+b+\cfrac{(3\gamma+c)(4\alpha+a)}{4\beta+b+\cfrac{(4\gamma+c)(5\alpha+a)}{5\beta+b+\cfrac{(5\gamma+c)(6\alpha+a)}{6\beta+b+\text{etc.}}}}}}$$

seinen Wert ausfindig zu machen.

LÖSUNG

Es werde im Allgemeinen diese Relation zwischen drei aufeinander folgenden Größen T, T', T'', welche sei

$$(\alpha n + a)T = (\beta n + b)T' + (\gamma n + c)T'',$$

und aus dem vorhergehenden Problem werde der Wert von T, wenn es freilich geschehen kann, auf diese Weise ausgedrückt gesucht

$$T = \int x^{n-1} dv = \int \frac{x^{n-1} Q dx}{\alpha - \beta x - \gamma xx},$$

dessen Integral von $x = 0$ bis hin zu $x = f$ erstreckt werde, nach Finden welcher Werte festgelegt werde

$$\int \frac{Qdx}{\alpha - \beta x - \gamma xx} = A \quad \text{und} \quad \int \frac{xQdx}{\alpha - \beta x - \gamma xx} = B,$$

so dass A und B die Werte von T für die Fälle $n = 1$ und $n = 2$ sind; nach Bestimmen von diesen wird der Wert des vorgelegten Kettenbruches durch die vorhergehenden Dinge $= \frac{(\alpha + a)A}{B}$ sein. Diese Untersuchung wollen wir also auf die folgenden Beispiele anwenden.

Beispiel 1

§29 Den Wert des allbekannten Kettenbruches ausfindig zu machen, den einst BROUNCKER für die Quadratur des Kreises vorgebracht hat, welcher ist

$$2 + \cfrac{1 \cdot 1}{2 + \cfrac{3 \cdot 3}{2 + \cfrac{5 \cdot 5}{2 + \text{etc.}}}}$$

Weil also die ganzen Teile zur Linken konstant $= 2$ sind, wird für unsere allgemeine Form werden

$$\beta + b = 2, \quad 2\beta + b = 2, \quad 3\beta + b = 2 \quad \text{etc.;}$$

er wird also $\beta = 0$ und $b = 2$ sein; aber für die Zähler der folgenden Brüche, weil sie ja aus zwei Faktoren bestehen, wird für die ersten Faktoren gelten

$$\gamma + c = 1, \quad 2\gamma + c = 3, \quad 3\gamma + c = 5, \quad 4\gamma + c = 7 \quad \text{etc.,}$$

woher $\gamma = 2$ und $c = -1$ geschlossen wird, für die anderen wird hingegen sein

$$2\alpha + a = 1, \quad 3\alpha + a = 3, \quad 4\alpha + a = 5 \quad \text{etc.}$$

woher $\alpha = 2$ und $a = -3$ wird. Aus diesen Werten erschließen wir aber diese Gleichung

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dx(3 + 2x - xx)}{2x(1 - xx)},$$

welche mit $1 + x$ gekürzt liefert

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dx(3 - x)}{2x(1 - x)},$$

woher durch Integrieren wird

$$\log Q = -\frac{3}{2}\log x + \log(1 - x) \quad \text{und daher} \quad Q = \frac{1 - x}{x^{\frac{3}{2}}},$$

aus welchem Wert weiter folgt

$$A = \int \frac{(1-x)dx}{2x^{\frac{3}{2}}(1-xx)} = \int \frac{dx}{2x(1+x)\sqrt{x}},$$
$$B = \int \frac{(1-x)dx}{2x^{\frac{1}{2}}(1-xx)} = \int \frac{dx}{2(1+x)\sqrt{x}}.$$

§30 In diesem Werten wird aber dieser Umstand entdeckt, dass man das Integral nach Setzen von $x = 0$ nicht verschwinden lassen kann. Aber diese Unannehmlichkeit kann leicht beseitigt werden, wenn wir den Bruch um das oberste Glied beschneiden und den Wert dieses Bruches suchen

$$2 + \cfrac{3 \cdot 3}{2 + \cfrac{5 \cdot 5}{2 + \text{etc.};}}$$

wenn dieser als $= s$ aufgefunden worden ist, wird der Wert des vorgelegten selbst $= b + \frac{1}{s}$ sein. Nun wird in der Tat nach Anstellen eines Vergleiches wie zuvor $\beta = 0$ und $b = 2$, dann aber $\gamma = 2$ und $c = +1$, $\alpha = 2$ und $a = -1$, woher folgt

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dx(1+2x+xx)}{2x(1-xx)} = -\frac{dx(1+x)}{2x(1-x)},$$

woher durch Integrieren wird

$$\log Q = -\frac{1}{2}\log x + \log(1-x) \quad \text{und daher} \quad Q = \frac{1-x}{\sqrt{x}},$$

aus welchem Wert wir nun haben werden

$$A = \int \frac{(1-x)dx}{2(1-xx)\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$

und

$$B = \frac{1}{2} \int \frac{dx\sqrt{x}}{1+x};$$

dort, weil $Q = \frac{1-x}{\sqrt{x}}$ ist, verschwindet ihr Wert offenbar nach Setzen von $x = 1$, weswegen jene Integrale von der Grenze $x = 0$ bis hin zur Grenze $x = 1$ zu erstrecken sind.

§31 Um nun diese Integrale leichter zu finden, wollen wir $x = zz$ setzen, so dass die Integrationsgrenzen immer noch $z = 0$ und $z = 1$ sind; und es wird sein

$$A = \int \frac{dz}{1+zz} = \arctan z = \frac{\pi}{4}$$

und

$$B = \int \frac{zzdz}{1+zz} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

und so werden wir $s = \frac{\pi}{4-\pi}$ haben, weshalb der Wert des BROUNCKER'schen Kettenbruches $1 + \frac{4}{\pi}$ ist, ganz und gar wie einst BROUNCKER schon gefunden hatte.

BEISPIEL 2

§31[a] Den Wert dieses sich weiter erstreckenden BROUCKER'schen Kettenbruches ausfindig zu machen

$$\cfrac{1\cdot 1}{b+\cfrac{3\cdot 3}{b+\cfrac{5\cdot 5}{b+\text{etc.}}}}$$

Um hier den oberen Umstand zu vermeiden, wollen wir das oberste Glied weglassen und wollen suchen

$$s = b+\cfrac{3\cdot 3}{b+\cfrac{5\cdot 5}{b+\text{etc.},}}$$

weil ja dann der gesuchte Wert $= b+\frac{1}{s}$ sein wird. Nun wird also $\beta = 0$ und $b = b$, $\gamma = 2$, $c = 1$, $\alpha = 2$ und $a = -1$ sein, woher wird

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dx(1+bx+xx)}{3x(1-xx)}$$

und daher

$$\log Q = -\frac{1}{2}\log x - \frac{b-2}{4}\log(1+x) + \frac{b+2}{4}\log(1+x)$$

und daraus

$$Q = \frac{(1-x)^{\frac{b+2}{4}}}{(1-x)^{\frac{b-2}{4}}\sqrt{x}},$$

welche Formel natürlich $= 0$ wird, indem $x = 1$ gesetzt wird, wenn freilich $b+2$ eine positive Zahl war, woher wird

$$dv = \frac{(1-x)^{\frac{b-2}{4}}dx}{2(1+x)^{\frac{b+2}{4}}\sqrt{x}}.$$

Daher wird aber erschlossen werden

$$A = \int \frac{(1-x)^{\frac{b-2}{4}} dx}{2(1+x)^{\frac{b+2}{4}}\sqrt{x}} \quad \text{und} \quad B = \int \frac{(1-x)^{\frac{b-2}{4}} dx\sqrt{x}}{2(1+x)^{\frac{b+2}{4}}}$$

oder wir werden durch Setzen von $x = zz$ haben

$$A = \int \frac{(1-zz)^{\frac{b-2}{4}} dz}{2(1+zz)^{\frac{b+2}{4}}} \quad \text{und} \quad B = \int \frac{(1-zz)^{\frac{b-2}{4}} dz}{2(1+zz)^{\frac{b+2}{4}}},$$

welche beiden Integrale von $z = 0$ bis hin zu $z = 1$ zu erstrecken sind. Aus diesen Werten A und B wird $s = \frac{A}{B}$ sein; der Wert des vorgelegten Kettenbruches selbst wird $= b + \frac{1}{s} = b + \frac{B}{A}$ sein.

§32 Wenn daher hier $b = 2$ gesetzt wird, geht der zuvor dargestellte von der Quadratur des Kreises abhängende Fall hervor, in welchem Fall natürlich die Formel rational wird. Wann immer aber die Exponenten $\frac{b-2}{4}$ und $\frac{b+2}{4}$ keine ganzen Zahlen sind, dann ist es weder möglich, die Buchstaben A und B durch Kreisbogen noch durch Logarithmen auszudrücken. Wie wenn beispielsweise $b = 4$ war, wird sein

$$A = \int \frac{dz\sqrt{1-zz}}{(1+zz)^{\frac{3}{2}}},$$

deren Wert durch Ellipsenbogen dargeboten werden könnte. Aber wenn b eine ungerade Zahl war, werden diese Werte um Vieles mehr transzendent, so dass wir mit diesen Buchstaben A und B selbst zufrieden sein müssen. Anderenfalls aber, wenn jene Exponenten ganze Zahlen werden, wird es möglich sein, die ganze Aufgabe durch Kreisbogen zu erledigen.

§33 Aber jene Exponenten $\frac{b-2}{4}$ und $\frac{b+2}{4}$ werden ganze Zahlen sein, sooft b eine Zahl von dieser Form war

$$b = 4i + 2;$$

dann wird nämlich gelten

$$A = \frac{(1-zz)^i dz}{(1+zz)^{i+1}} \quad \text{und} \quad B = \frac{(1-zz)^i zzdz}{(1+zz)^{i+1}};$$

wie also diese Fälle entwickelt werden müssen, wird der Mühe wert sein es zu lehren, weil ja WALLIS sie schon betrachtet hat.

§34 Weil ja diese Aufgabe auf die Reduktion von Integralformeln dieser Art auf einfachere Formen zurückgeht, wollen wir im Allgemeinen die Form $P = \frac{z^m}{(1+zz)^n}$ betrachten, deren Differential in den folgenden Formen dargeboten werden kann:

$$\begin{aligned}
&1. \quad dP = \frac{mz^{m-1}dz}{(1+zz)^n} - \frac{2nz^{m+1}dz}{(1+zz)^{n+1}},\\
&2. \quad dP = \frac{mz^{m-1}dz}{(1+zz)^{n+1}} - \frac{(2n-m)z^{m+1}dz}{(1+zz)^{n+1}},\\
&3. \quad dP = -\frac{(2n-m)z^{m-1}dz}{(1+zz)^n} + \frac{2nz^{m-1}dz}{(1+zz)^{n+1}},
\end{aligned}$$

woher wir diese drei Reduktionen der Integratlformeln ableiten

$$\text{I.} \quad \int \frac{z^{m+1}dz}{(1+zz)^{n+1}} = \frac{m}{2n}\int \frac{z^{m-1}dz}{(1+zz)^n} - \frac{1}{2n}\cdot\frac{z^m}{(1+zz)^n},$$

$$\text{II.} \quad \int \frac{z^{m+1}dz}{(1+zz)^{n+1}} = \frac{m}{2n-m}\int \frac{z^{m-1}dz}{(1+zz)^{n+1}} - \frac{1}{2n-m}\cdot\frac{z^m}{(1+zz)^n},$$

$$\text{III.} \quad \int \frac{z^{m-1}dz}{(1+zz)^{n+1}} = \frac{2n-m}{2n}\int \frac{z^{m-1}dz}{(1+zz)^n} + \frac{1}{2n}\cdot\frac{z^m}{(1+zz)^n},$$

mit Hilfe welcher Reduktionen in den Fällen $b = 4i+2$ die ganze Aufgabe erledigt werden und auf die Formel $\frac{\pi}{4}$ zurückgeführt werden können wird, wenn freilich nach der Integration $z = 1$ genommen wird.

§35 Es sei $i = 1$ und daher $b = 6$ und wird gelten

$$A = \int \frac{(1-zz)dz}{(1+zz)^2} \quad \text{und} \quad B = \int \frac{(1-zz)zzdz}{(1+zz)^2}.$$

Nun werden wir also durch die dritte Reduktion auffinden

$$\int \frac{dz}{(1+zz)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{1+zz} + \frac{1}{2}\cdot\frac{z}{1+zz} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

und durch die erste Reduktion

$$\int \frac{zzdz}{(1+zz)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{1+zz} - \frac{1}{2}\cdot\frac{z}{1+zz} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4},$$

weiter

$$\int \frac{z^4dz}{(1+zz)^2} = \frac{3}{2}\int \frac{zzdz}{1+zz} - \frac{1}{2}\cdot\frac{z^3}{1+zz} = \frac{5}{4} - \frac{3\pi}{8}.$$

Aus diesen Werten wird nun $A = \frac{1}{2}$ und $B = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}$ und daher $\frac{B}{A} = \pi - 3$ erschlossen, weshalb diese Summation entspringen wird

$$3 + \pi = 6 + \cfrac{1 \cdot 1}{6 + \cfrac{3 \cdot 3}{6 + \cfrac{5 \cdot 5}{6 + \cfrac{7 \cdot 7}{6 + \text{etc.}}}}}$$

§36 Es sei nun $i = 2$ und $b = 10$ und es wird sein

$$A = \int \frac{(1-zz)^2 dz}{(1+zz)^3} \quad \text{und} \quad B = \int \frac{zz(1-zz)^2 dz}{(1+zz)^3}.$$

Um die Werte dieser Integrale ausfindig zu machen, wollen wir die folgenden Formel entwickeln

$$\begin{aligned}
\int \frac{dz}{(1+zz)^3} &= \frac{3}{4} \int \frac{dz}{(1+zz)^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{z}{(1+zz)^2} = \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}, \\
\int \frac{zzdz}{(1+zz)^3} &= \frac{1}{4} \int \frac{dz}{(1+zz)^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{z}{(1+zz)^2} = \frac{\pi}{32}, \\
\int \frac{z^4 dz}{(1+zz)^3} &= \frac{3}{4} \int \frac{zzdz}{(1+zz)^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{z^3}{(1+zz)^2} = \frac{3\pi}{32} - \frac{1}{4}, \\
\int \frac{z^6 dz}{(1+zz)^3} &= \frac{5}{4} \int \frac{z^4 dz}{(1+zz)^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{z^5}{(1+zz)^2} = \frac{3}{2} - \frac{15\pi}{32}.
\end{aligned}$$

Aus diesen Werten wird nun $A = \frac{\pi}{8}$ und $B = 2 - \frac{5\pi}{8}$ und daher $\frac{B}{A} = \frac{16 - 5\pi}{\pi}$, woher die folgende Summation ans Licht treten wird

$$\frac{5\pi+16}{\pi} = 10 + \cfrac{1\cdot 1}{10 + \cfrac{3\cdot 3}{10 + \cfrac{5\cdot 5}{10 + \text{etc.}}}}$$

§37 Wenn b eine negative Zahl wäre, würde die Untersuchung überhaupt keine Schwierigkeiten bereiten. Wenn nämlich im Allgemeinen galt

$$s = -a + \cfrac{\alpha}{-b + \cfrac{\beta}{-c + \cfrac{\gamma}{-d + \cfrac{\delta}{-e + \text{etc.},}}}}$$

wird auch immer sein

$$-s = a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c + \cfrac{\gamma}{d + \cfrac{\delta}{e + \text{etc.},}}}}$$

woher, wenn man den Wert dieses Ausdruckes hat, derselbe negativ genommen den Wert von jenem geben wird.

Beispiel 3

§38 Es sei dieser Kettenbruch, dessen Wert ausfindig gemacht werden müssen soll, vorgelegt

$$1+\cfrac{1\cdot 1}{3+\cfrac{3\cdot 3}{5+\cfrac{5\cdot 5}{7+\cfrac{7\cdot 7}{9+\text{etc.}}}}}$$

Um die oben [§28] erwähnten Brüche zu verwenden, sei nach Weglassen des obersten Gliedes

$$s=3+\cfrac{3\cdot 3}{5+\cfrac{5\cdot 5}{7+\cfrac{7\cdot 7}{9+\text{etc.}}}}$$

und es wird $\beta+b=3$, $2\beta+b=5$ und daher $\beta=2$ und $b=1$, dann aber wie zuvor $\alpha=2$, $a=-1$, $\gamma=2$ und $c=+1$ sein; nachdem aber s gefunden worden ist, wird der gesuchte Wert $=1+\frac{1}{s}$ sein. Nun werden wir also haben

$$\frac{dQ}{Q}=-\frac{dx(1+x+xx)}{2x(1-x-xx)}.$$

Es ist aber

$$\frac{1+x+xx}{x(1-x-xx)}=\frac{1}{x}+\frac{2+2x}{1-x-xx},$$

woher wird

$$\log Q=-\frac{1}{2}\log x-\int\frac{dx(1+x)}{1-x-xx}.$$

Weiter wollen wir aber für die zu findende Formel $\int\frac{dx(1+x)}{1-x-xx}$ den Nenner wie folgt festlegen

$$1 - x - xx = (1 - fx)(1 - gx)$$

und es wird $f + g = 1$ und $fg = -1$ sein, woher wird

$$f = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad g = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Nun setze man

$$\frac{1+x}{1-x-xx} = \frac{\mathfrak{A}}{1-fx} + \frac{\mathfrak{B}}{1-gx},$$

woher aufgefunden werden wird

$$\mathfrak{A} = \frac{1+f}{f-g} \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} = -\frac{1+g}{f-g},$$

oder es wird nach Einsetzen der oben für f und g gegebenen Werte sein

$$\mathfrak{A} = \frac{\sqrt{5}+3}{2\sqrt{5}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} = \frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}},$$

nach Einsetzen welcher Werte sein wird

$$\begin{aligned} \int \frac{dx(1+x)}{1-x-xx} &= -\frac{\mathfrak{A}}{f}\log(1-fx) - \frac{\mathfrak{B}}{g}\log(1-gx), \\ &= -\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\log(1-fx) - \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\log(1-gx), \end{aligned}$$

weshalb werden wird

$$\log Q = -\frac{1}{2}\log x + \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\log(1-fx) + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\log(1-gx),$$

und als logische Konsequenz

$$Q = \frac{(1-fx)^{\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}}(1-gx)^{\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}}}{\sqrt{x}},$$

welcher Wert in zwei Fällen verschwindet, zum einen, wenn gilt

$$x = \frac{1}{f} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

zum anderen, wenn gilt

$$x = \frac{1}{g} = -\frac{1+\sqrt{5}}{2};$$

welchen von beiden wir aber auch gebrauchen, die Sache wird auf dasselbe zurückgehen.

§39 Aus diesem Wert werden wir aber haben

$$A = \int \frac{Qdx}{1-x-xx} \quad \text{und} \quad B = \int \frac{Qxdx}{1-x-xx},$$

woher weiter abgeleitet wird

$$s = (\alpha + a)\frac{A}{B} = \frac{A}{B};$$

daher wird die Summe des vorgelegten Bruches $1 + \frac{B}{A}$ sein. Daher lässt sich aber wegen der nicht nur irrationalen sondern auch wegen der surdischen Exponenten sehr transzendenten Differentialformeln nichts Weiteres schließen.

Beispiel 4

§40 Es sei dieser Kettenbruch vorgelegt

$$b+\cfrac{1\cdot 1}{b+\cfrac{2\cdot 2}{b+\cfrac{3\cdot 3}{b+\cfrac{4\cdot 4}{b+\text{etc.},}}}}$$

wo $\beta = 0$, $b = b$ ist.

Nun wollen wir diese Form betrachten

$$s = b+\cfrac{2\cdot 2}{b+\cfrac{3\cdot 3}{b+\text{etc.},}}$$

nach Finden welches Wertes natürlich der gesuchte $= b + \frac{1}{s}$ sein wird. Wir werden also $\gamma + c = 2$, $2\gamma + c = 3$ und daher $\gamma = 1$ und $c = 1$ haben, des Weiteren wird $\alpha = \gamma = 1$, $a = 0$ und $c = 1$ sein. Daher erschließen wir also

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dx(bx+xx)}{x(1-xx)} = -\frac{dx(b+x)}{1-xx}$$

und daher

$$\log Q = -\frac{b}{2}\log\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\log(1-xx)$$

und daraus

$$Q = \frac{(1-x)^{\frac{b}{2}}\sqrt{1-xx}}{(1+x)^{\frac{b}{2}}} = \frac{(1-x)^{\frac{b+1}{2}}}{(1+x)^{\frac{b-1}{2}}},$$

welche Göße natürlich nach Setzen von $x=1$ verschwindet. Daher wird also werden

$$A = \int \frac{Qdx}{1-xx} = \int \frac{(1-x)^{\frac{b+1}{2}}dx}{(1+x)^{\frac{b-1}{2}}(1-xx)} = \int \frac{(1-x)^{\frac{b-1}{2}}dx}{(1+x)^{\frac{b+1}{2}}}$$

und

$$B = \int \frac{x(1-x)^{\frac{b-1}{2}}dx}{(1+x)^{\frac{b+1}{2}}},$$

dann wird aber $s = (\alpha + a)\frac{A}{B} = \frac{A}{B}$ und daher die gesuchte Summe $b + \frac{B}{A}$ sein.

§41 Wir wollen nun die besonderen Fälle durchgehen und es sei zuerst $b=1$ und es wird gelten

$$A = \int \frac{dx}{1+x} = \log(1+x) = \log 2 \quad \text{und} \quad B = \int \frac{xdx}{1+x} = x - \int \frac{dx}{1+x} = 1 - \log 2$$

und daher wird $b + \frac{A}{B} = \frac{1}{\log 2}$ sein; also wird diese Summation hervorgehen

$$\frac{1}{\log 2} = 1 + \cfrac{1\cdot 1}{1 + \cfrac{2\cdot 2}{1 + \cfrac{3\cdot 3}{1 + \text{etc.}}}}$$

§42 Es sei nun $b = 2$ und es wird sein

$$A = \int \frac{dx\sqrt{1-x}}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{und} \quad B = \int \frac{xdx\sqrt{1-x}}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}.$$

Um diese Formeln rational zu machen, wollen wir festlegen

$$\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} = z$$

und es wird $x = \frac{1-zz}{1+zz}$ sein, woher den Integrationsgrenzen $x = 0$ und $x = 1$ respektive $z = 1$ und $z = 0$ entsprechen werden; dann wird aber gelten

$$1 + x = \frac{2}{1+zz} \quad \text{und} \quad dx = -\frac{4zdz}{(1+zz)^2}$$

und daher wird erschlossen

$$A = -\int \frac{zz}{1+zz} = -2z + 2\arctan z = 2 - \frac{\pi}{2},$$

weiter wird

$$B = -2\int \frac{zzdz}{(1+zz)^2} + 2\int \frac{z^4}{(1+zz)^2}.$$

durch die oben (§35) bewiesenen Reduktionen, wenn wir hier natürlich die Integrationsgrenzen $z = 1$ und $z = 0$ vertauschen, dass wir haben

$$B = +2\int \frac{zzdz}{(1+zz)^2} - 2\int \frac{z^4}{(1+zz)^2},$$

wird also gelten

$$B = 2\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) - 2\left(\frac{5}{4} - \frac{3\pi}{8}\right) = \pi - 3,$$

woher diese Summation folgt

$$\frac{2}{4-\pi} = 2 + \cfrac{1\cdot 1}{2 + \cfrac{2\cdot 2}{2 + \cfrac{3\cdot 3}{2 + \cfrac{4\cdot 4}{2 + \text{etc.},}}}}$$

welche der BROUNCKER'schen bezüglich der Schlichtheit in nichts nachsteht.

§43 Wenn wir $b = 0$ setzen, geht der Kettenbruch in das folgende kontinuierliche Produkt über

$$\frac{1\cdot 1}{2\cdot 2}\cdot\frac{3\cdot 3}{4\cdot 4}\cdot\frac{5\cdot 5}{6\cdot 6}\cdot\frac{7\cdot 7}{8\cdot 8}\cdot\text{etc.};$$

in diesem Fall wird aber

$$A = \int \frac{dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} B = \int \frac{xdx}{\sqrt{1-xx}} = 1,$$

woher der Wert dieses Produktes zu $\frac{2}{\pi}$ erschlossen wird, was außerordenlich mit schon längst Bekanntem übereinstimmt, weil ja dieses Produkt die WALLIS'sche Progression selbst ist.

BEISPIEL 5

§44 Es sei dieser Kettenbruch vorgelegt, wo $\beta = 0$, $b = b$ und die Zähler die trigonalen Zahlen sind,

$$b+\cfrac{1}{b+\cfrac{3}{b+\cfrac{6}{b+\cfrac{10}{b+\text{etc.}}}}}$$

Nachdem das oberste Glied weggelassen worden ist, wollen wir festlegen

$$=b+\cfrac{3}{b+\cfrac{6}{b+\text{etc.}}}$$

und zuerst wollen wir die Zähler auf diese Weise durch Produkte darstellen

$$3=2\cdot\frac{3}{2},\quad 6=3\cdot\frac{4}{2},\quad 10=4\cdot\frac{5}{2}\quad \text{etc.},$$

von welchen die ersten mit den Formeln $\gamma+c$, $2\gamma+c$, $3\gamma+c$, die zweiten hingegen mit den Formeln $2\alpha+a$, $3\alpha+a$, $4\alpha+a$ verglichen werden, und es wird $\gamma=1$, $c=1$, $\alpha=\frac{1}{2}$ und $a=\frac{1}{2}$ sein, woher sein wird

$$\frac{dQ}{Q}=\frac{dx(\frac{1}{2}-bx-xx)}{x(\frac{1}{2}-xx)}=\frac{dx(1-2bx-2xx)}{x(1-2xx)}$$

oder

$$\frac{dQ}{Q}=\frac{dx}{x}-\frac{2bdx}{1-2xx},$$

deren Integral dieses ist

$$\log Q=\log x-\frac{b}{\sqrt{2}}\log\frac{1+x\sqrt{2}}{1-x\sqrt{2}},$$

also

$$Q = \frac{x(1-x\sqrt{2})^{\frac{b}{\sqrt{2}}}}{(1+x\sqrt{2})^{\frac{b}{\sqrt{2}}}},$$

welche Formel im Fall $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ verschwindet. Daher wird also sein

$$dv = \frac{2x(1-x\sqrt{2})^{\frac{b}{\sqrt{2}}}dx}{(1-2xx)(1+x\sqrt{2})^{\frac{b}{\sqrt{2}}}}.$$

Es sei $\frac{b}{\sqrt{2}} = \lambda$ und es wird sein

$$A = 2\int \frac{x(1-x\sqrt{2})^{\lambda}dx}{(1-2xx)(1+x\sqrt{2})^{\lambda}} = 2\int \frac{x(1-x\sqrt{2})^{\lambda-1}dx}{(1+x\sqrt{2})^{\lambda+1}}$$

und

$$B = 2\int \frac{xx(1-x\sqrt{2})^{\lambda-1}dx}{(1+x\sqrt{2})^{\lambda+1}},$$

wo nach der Integration $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ gesetzt wird; dann wird aber $s = \frac{A}{B}$ und daher der Wert des vorgelegten Kettenbruches $= b + \frac{B}{A}$.

§45 Wenn also $\lambda = \frac{b}{\sqrt{2}}$ keine rationale Zahl war, ist es nicht möglich, diese Werte angenehm anzugeben. Es sei also $b = \sqrt{2}$ oder $\lambda = 1$ und es wird gelten

$$A = 2\int \frac{xdx}{(1+x\sqrt{2})^2} \quad \text{und} \quad B = 2\int \frac{xxdx}{(1+x\sqrt{2})^2}.$$

Daher wird durch Integrieren erschlossen

$$A = \log(1 + x\sqrt{2}) - \frac{x\sqrt{2}}{1 + x\sqrt{2}}$$

und daher wird, nachdem $x\sqrt{2} = 1$ gesetzt worden ist, $A = \log 2 - \frac{1}{2}$ werden; dann wird aber aufgefunden

$$B = \frac{3}{2\sqrt{2}} - \sqrt{2} \cdot \log 2,$$

woher wegen $b = \sqrt{2}$ dann $b + \frac{B}{A} = \frac{1}{\sqrt{2}(2\log 2 - 1)}$ sein wird, woher diese Summation folgt

$$\frac{1}{\sqrt{2}(2\log 2 - 1)} = \sqrt{2} + \cfrac{1}{\sqrt{2} + \cfrac{3}{\sqrt{2} + \cfrac{6}{\sqrt{2} + \text{etc.}}}}$$

Bemerkung

§46 Aber die Kettenbrüche, zu den wir meistens in einer numerischen Rechnung geführt werden, pflegen eine Form von dieser Art zu haben

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \text{etc.}}}}}$$

wo alle Zähler Einheiten, die Nenner a, b, c, d, e etc. hingegen ganze Zahlen sind. Aber mit Hilfe unserer Methode ist es leicht möchlich, die Werte solcher Kettenbrüche zu finden, auch wenn die Zahlen a, b, c, d, e eine arithmetische Progression festlegen, was wir im folgenden Beispiel zeigen wollen.

BEISPIEL

§47 Es sei dieser Kettenbruch vorgelegt

$$\beta + b + \cfrac{1}{2\beta + b + \cfrac{1}{3\beta + b + \cfrac{1}{4\beta + b + \cfrac{1}{5\beta + b + \text{etc.},}}}}$$

wo $\alpha =$, $\gamma = 0$, $a = 1$, $c = 1$ ist.

Daher wird

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dx(1 - bx - xx)}{\beta xx},$$

woher folgt

$$\log Q = \frac{1}{\beta x} + \frac{b}{\beta}\log x + \frac{x}{\beta} \quad \text{und} \quad Q = e^{\frac{1+xx}{\beta x}} x^{\frac{b}{\beta}},$$

welcher Ausdruck freilich in keinem Fall verschwinden kann, auch wenn er mit x^n multipliziert wird, wenn freilich β eine positive Zahl war. Aber wenn wir für β keine positiven Zahlen nehmen, beispielsweise $\beta = -m$, dann verschwindet der Wert $Q = x^{\frac{-b}{m}} e^{\frac{-1-xx}{mx}}$ natürlich, so wenn $x = 0$ wie wenn $x = \infty$ ist. Daher wird aber sein

$$dv = \frac{x^{\frac{-b}{m}} e^{\frac{-1-xx}{mx}} dx}{mxx},$$

weswegen wir haben werden

$$A = \frac{1}{m}\int \frac{dx}{x^{2+\frac{b}{m}} e^{\frac{1+xx}{mx}}} \quad \text{und} \quad B = \frac{1}{m}\int \frac{dx}{x^{1+\frac{b}{m}} e^{\frac{1+xx}{mx}}}.$$

Nach Finden dieser Werte wird die Formel $\frac{A}{B}$ die Summe dieses Kettenbruches ausdrücken

$$-m+b+\cfrac{1}{-2m+b+\cfrac{1}{-3m+b+\cfrac{1}{-4m+b+\cfrac{1}{-5m+b+\text{etc.}}}}}$$

weswegen jene Formel negativ genommen, also $-\frac{A}{B}$, den Wert dieses Kettenbruches ausdrücken wird

$$m-b+\cfrac{1}{2m-b+\cfrac{1}{3m-b+\cfrac{1}{4m-b+\text{etc.}}}}$$

welcher sich also angeben ließe, wenn nur die Integralformeln A und B aufgelöst und von der Grenze $x=0$ bis zu $x=\infty$ erstreckt werden könnten. Aber diese Formeln sind so beschaffen, dass deren Integration nicht in einem einzigen Fall durch bekannte Größen ausgedrückt werden kann, was dennoch nicht verhindert, dass der Bruch $\frac{A}{B}$ hinreichend bekannte Werte involvieren kann, auch wenn wir sie auf keine Weise angeben können.

§48 Von solchen Kettenbrüchen sind mir freilich die zwei folgenden bekannt, werden Werte sich angenehm darbieten lassen:

$$n+\cfrac{1}{3n+\cfrac{1}{5n+\cfrac{1}{7n+\cfrac{1}{9n+\text{etc.}}}}}=\frac{e^{\frac{2}{n}}+1}{e^{\frac{2}{n}}-1}$$

und

$$n - \cfrac{1}{3n - \cfrac{1}{5n - \cfrac{1}{7n - \cfrac{1}{9n - \text{etc.}}}}} = \cot\frac{1}{n}.$$

Der erste dieser Brüche liefert mit den Formeln des letzten Beispiels verglichen $m - b = m$, $2m - b = 3n$ und daher $m = 2n$ und $b = n$, woher wird

$$A = \frac{1}{2n}\int \frac{dx}{x^{\frac{5}{2}} e^{\frac{1+xx}{2nx}}} \quad \text{und} \quad B = \frac{1}{2n}\int \frac{dx}{x^{\frac{2}{2}} e^{\frac{1+xx}{2nx}}},$$

woher wir nun lernen, wenn diese zwei Formeln von der Grenze $x = 0$ bis hin zur Grenze $x = \infty$ integriert werden, dass dann gelten wird

$$\frac{A}{B} = \frac{1 + e^{\frac{2}{n}}}{1 - e^{\frac{2}{n}}},$$

obwohl kein analytischer Weg bekannt, die Übereinkunft zu beweisen.